

## Aliran Genangan bagi Bendalir Mikroktub terhadap Permukaan Mencancang yang Telap dengan Fluks Haba Boleh Ubah

(Stagnation Flow of a Micropolar Fluid towards a Vertical Permeable Surface with Prescribed Heat Flux)

W.M.K.A. WAN ZAIMI & ANUAR ISHAK\*

### ABSTRAK

*Dalam makalah ini, masalah aliran genangan dalam bendalir mikroktub terhadap permukaan mencancang yang telap dengan fluks haba boleh ubah dipertimbangkan. Dengan menggunakan penjelmaan keserupaan, persamaan asas yang menakluk aliran bendalir dan pemindahan haba dijelmakan kepada satu set persamaan perbezaan biasa. Persamaan yang dijelmakan tertakluk kepada syarat-syarat sempadan yang berkaitan kemudiannya diselesaikan secara berangka menggunakan kaedah tembakan. Kesan parameter sedutan/semburan  $f_w$  ke atas profil halaju dan suhu serta pekali geseran kulit dan nombor Nusselt setempat diperolehi dan dibincangkan. Keputusan berangka menunjukkan bahawa penyelesaian dual wujud dalam kedua-dua aliran membantu dan aliran menentang.*

*Kata kunci: Aliran genangan; bendalir mikroktub; mekanik bendalir; penyelesaian dual; sedutan/semburan*

### ABSTRACT

*This paper deals with the stagnation flow of a micropolar fluid towards a vertical permeable surface with prescribed heat flux. By using a similarity transformation, the basic equations governing the fluid flow and heat transfer are transformed into a set of ordinary differential equations. The transformed equations subjected to the associated boundary conditions are then solved numerically using the shooting method. The effects of suction/injection parameter  $f_w$  on the velocity and the temperature profiles as well as the skin friction coefficient and the local Nusselt number are obtained and discussed. The numerical results indicate that dual solutions exist in both assisting and opposing flows.*

*Keywords: Dual solutions; fluid mechanics; micropolar fluid; stagnation flow; suction/injection*

### PENGENALAN

Teori bendalir mikroktub mula diperkenalkan oleh Eringen (1966). Teori ini telah menarik perhatian ramai penyelidik untuk melakukan kajian lanjutan, kerana ia boleh menerangkan telatah aliran bendalir seperti minyak pelincir, cat, polimer dan darah haiwan yang tidak boleh diterangkan oleh teori klasik bendalir Newtonian. Selain daripada persamaan keselantaran dan persamaan momentum yang biasa ditemui dalam teori klasik bendalir Newtonian, teori ini mempertimbangkan satu lagi persamaan yang memenuhi prinsip keabadian momentum sudut. Ini seterusnya meningkatkan bilangan parameter yang terlibat. Antara kajian terkini bendalir mikroktub termasuk kajian yang dilakukan oleh Asgharian et al. (2010), He dan Fan (2012), Ishak (2010), Sherief et al. (2011), Wang dan Yuan (2012) dan Yacob dan Ishak (2010, 2012).

Telatah aliran bendalir dua matra terhadap titik genangan mula dikaji oleh Hiemenz pada tahun 1911 (Schlichting & Gersten 2003). Beliau memperoleh penyelesaian tepat persamaan Navier-Stokes bagi masalah tersebut. Ramachandran et al. (1988) memperluaskan kajian ini terhadap plat mencancang dengan mengambil

kira pengaruh daya keapungan terhadap aliran bendalir dan ciri-ciri pemindahan haba. Mereka mempertimbangkan dua keadaan pemanasan permukaan, suhu permukaan boleh ubah dan fluks haba permukaan boleh ubah dan mendapati penyelesaian dual wujud untuk suatu julat tertentu parameter keapungan. Hassanien dan Gorla (1990) kemudian memperluaskan kajian ini kepada bendalir mikroktub. Mereka menyiasat kedua-dua kes, daya keapungan dalam arah yang sama dengan aliran bebas (aliran membantu) dan daya keapungan dalam arah yang bertentangan dengan aliran bebas (aliran menentang). Bagaimanapun, kewujudan penyelesaian dual tidak dilaporkan. Kemudian, Devi et al. (1991) menambah dimensi baru ke atas sumbangan Ramachandran et al. (1988) dengan mempertimbangkan aliran tidak mantap. Mereka mendapati bahawa penyelesaian dual hanya wujud dalam suatu julat tertentu parameter keapungan bagi aliran menentang, manakala bagi aliran membantu, penyelesaian adalah unik. Lok et al. (2005) menganalisis masalah aliran mantap olakan campuran dalam bendalir mikroktub berhampiran titik genangan pada permukaan mencancang. Seperti penyelidik terdahulu, penyelesaian dual hanya dilaporkan bagi kes aliran menentang. Ishak

et al. (2008) mengkaji secara berangka aliran genangan mantap terhadap permukaan mencancang dengan kesan sedutan dan semburan pada permukaan. Mereka melaporkan kewujudan penyelesaian dual bagi kedua-dua aliran membantu dan aliran menentang untuk suatu julat tertentu parameter keapungan.

Baru-baru ini, Yacob dan Ishak (2010) mengkaji aliran mantap terhadap titik genangan pada plat mencancang yang diregang dalam bendalir mikrocutub dengan fluks haba permukaan boleh ubah. Mereka mendapati bendalir mikrocutub menyebabkan pengurangan daya seretan berbanding bendalir Newtonian, seterusnya mengakibatkan pengurangan kadar pemindahan haba pada permukaan. Kewujudan penyelesaian dual bagi kedua-dua aliran membantu dan aliran menentang turut dilaporkan. Asgharian et al. (2010) menyelesaikan secara analitik masalah aliran genangan bendalir mikrocutub terhadap permukaan mencancang yang telap bagi kedua-dua aliran membantu dan aliran menentang menggunakan kaedah analisis homotopi (HAM), tetapi kewujudan penyelesaian dual tidak dilaporkan. Dalam kajian ini, telatah aliran genangan dan pemindahan haba dalam bendalir mikrocutub terhadap permukaan mencancang yang telap dengan kesan sedutan dan semburan dikaji. Contoh aplikasi adalah seperti dalam proses penyejukan, dengan bahan penyejuk disemur pada permukaan mencancang (Lok & Pop 2011). Berbeza dengan Asgharian et al. (2010), kajian ini mempertimbangkan kes fluks haba permukaan ditetapkan.

#### FORMULASI MASALAH

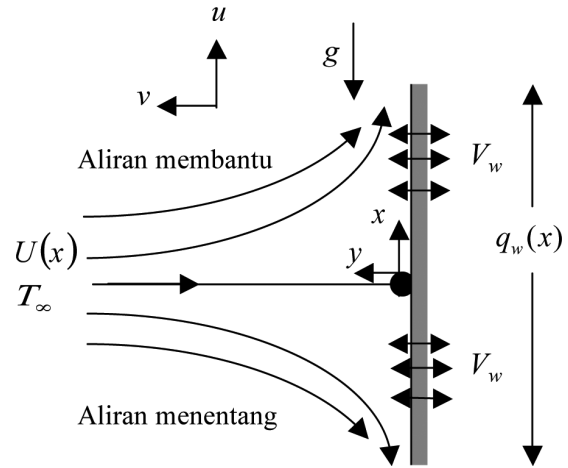
Aliran genangan dua matra normal terhadap plat tegak dalam bendalir mikrocutub tidak mampat dipertimbangkan. Diandaikan bahawa plat tertakluk kepada fluks haba boleh ubah  $q_w(x)$  dan terdapat halaju aliran bebas  $U(x)$  yang mengalir di sepanjang plat dan daya keapungan boleh bertindak dalam arah yang sama (aliran membantu) atau dalam arah bertentangan (aliran menentang) dengan aliran bebas seperti digambarkan dalam Rajah 1. Selain itu, permukaan dianggap telap supaya kesan sedutan dan semburan pada permukaan dapat dipertimbangkan. Dengan andaian-andaian ini, juga dengan penghampiran Boussinesq, persamaan menakluk diberi oleh (Asgharian et al. 2010).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\mu + \kappa}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial N}{\partial y} + g\beta(T - T_w), \quad (2)$$

$$\rho j \left( u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \gamma \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - \kappa \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (4)$$



RAJAH 1. Sistem koordinat dan model fizikal

tertakluk kepada syarat sempadan:

$$u = 0, \quad v = V_w, \quad N = -m \frac{\partial u}{\partial y}, \quad k \frac{\partial T}{\partial y} = -q_w(x) \quad \text{pada } y = 0, \\ u \rightarrow U(x), \quad N \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad \text{apabila } y \rightarrow \infty, \quad (5)$$

dengan  $u$  dan  $v$  masing-masing adalah komponen halaju sepanjang paksi  $x$  dan  $y$ ,  $T$  suhu bendalir,  $T_\infty$  suhu persekitaran,  $N$  mikroputaran,  $\rho$  ketumpatan bendalir,  $\mu$  kelikatan dinamik,  $\kappa$  kelikatan vorteks,  $g$  pecutan graviti,  $\gamma$  kelikatan kecerunan putaran,  $\alpha$  pekali resapan terma,  $\beta$  pekali kembangan terma,  $j$  mikroinersia, dan  $V_w$  fluks jisim permukaan seragam, yang  $V_w$  mewakili sedutan ( $V_w > 0$ ) atau semburan ( $V_w < 0$ ) pada permukaan. Seperti dibincangkan oleh Nazar et al. (2004),  $m$  adalah parameter sempadan dengan  $0 \leq m \leq 1$ . Di samping itu, diandaikan bahawa  $U(x) = ax$  dan  $q_w(x) = bx$ , yang  $a$  dan  $b$  adalah pemalar. Sebutan terakhir di sebelah kanan persamaan (2) merujuk kepada pengaruh daya keapungan terma dalam medan aliran. Dalam sesetengah kes, kesan mikrostruktur mungkin tidak ketara dan jumlah putaran  $N$  menjadi halaju sudut. Dalam kes begini, kelikatan kecerunan putaran  $\gamma$  diberi oleh  $\gamma = (\mu + \kappa/2)j = \mu(1 + K/2)j$ , yang  $K = \kappa/\mu$  adalah parameter bahan (Ahmadi 1976; Kline 1977; Gorla 1988).

Bagi mendapatkan penyelesaian keserupaan bagi persamaan (1)–(4) tertakluk kepada syarat-syarat sempadan (5), penjelmaan keserupaan berikut diperkenalkan:

$$\eta = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} y, \quad \psi = \sqrt{U\nu x} f(\eta) \\ C(\eta) = N \sqrt{\frac{\nu x}{U^3}}, \quad \theta(\eta) = \frac{k(T - T_\infty)}{q_w} \left( \frac{U}{\nu x} \right)^{1/2}, \quad (6)$$

dengan  $\eta$  adalah pemboleh ubah keserupaan,  $f(\eta)$  adalah fungsi strim tanpa matra,  $C(\eta)$  adalah mikroputaran tanpa matra,  $\theta(\eta)$  adalah suhu tanpa matra,  $\psi$  adalah kelikatan kinematik dan  $\psi$  adalah fungsi strim yang ditakrifkan sebagai  $u = \partial\psi/\partial y$  dan  $v = -\partial\psi/\partial x$  yang

memenuhi persamaan keselajaran (1). Menggunakan (6), diperoleh

$$u = Uf'(\eta), \quad v = -\sqrt{va}f(\eta). \quad (7)$$

Gantikan (6) ke dalam (2) - (4), diperoleh persamaan perbezaan biasa tak linear berikut:

$$(1 + K)f'''' + ff'''' + 1 - f^2 + KC' + \lambda\theta = 0 \quad (8)$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)C'' + fC' - f'C - K(2C + f'') = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' - f'\theta = 0, \quad (10)$$

dan syarat-syarat sempadan (5) terturun kepada

$$f = f_w, \quad f' = 0, \quad C = -mf''(0), \quad \theta' = -1, \quad \text{pada } \eta = 0, \\ f' \rightarrow 1, \quad C \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \text{apabila } \eta \rightarrow \infty, \quad (11)$$

dengan tanda ( ' ) menunjukkan pembezaan terhadap  $\eta$ , Pr adalah nombor Prandtl,  $\lambda = Gr_x/Re_x^2$  adalah parameter keapungan (pemalar) atau parameter olakan campuran dengan  $Gr_x = g\beta(T_w - T_\infty)x^3/\nu^2$  adalah nombor Grashof setempat manakala  $Re_x$  adalah nombor Reynolds setempat. Dalam persamaan (11),  $f_w = -V_w/\sqrt{va}$  mewakili parameter sedutan/semburan dengan  $f_w < 0$  mewakili sedutan dan  $f_w > 0$  mewakili semburan, manakala  $f_w = 0$  mewakili kes plat tak telap yang telah dipertimbangkan oleh Hassanien dan Gorla (1990) dan Lok et al. (2005).

Kuantiti-kuantiti fizikal yang dikaji ialah pekali geseran kulit  $C_f$  dan nombor Nusselt setempat  $Nu_x$  yang diberikan sebagai:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U^2 / 2}, \quad Nu_x = \frac{xq_w}{k(T_w - T_\infty)}, \quad (12)$$

yang  $\tau_w$  adalah tegasan ricih permukaan dan  $q_w$  adalah fluks haba permukaan, yang ditakrifkan sebagai

$$\tau_w = \left[ (\mu + \kappa) \frac{\partial u}{\partial y} + \kappa N \right]_{y=0}, \quad q_w = -k \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0}, \quad (13)$$

Dengan menggunakan (6), (11) dan (12), diperoleh

$$\frac{1}{2} C_f (Re_x)^{1/2} = [1 + (1 - m)K] f''(0), \quad Nu_x (Re_x)^{-1/2} = \frac{1}{\theta(0)}. \quad (14)$$

#### HASIL DAN PERBINCANGAN

Persamaan pembezaan biasa tak linear (8) - (10) bersama-sama dengan syarat sempadan (11) diselesaikan secara berangka menggunakan kaedah tembakan. Jadual 1 memaparkan nilai-nilai pekali geseran kulit  $\frac{1}{2} C_f Re_x^{1/2}$  dan nombor Nusselt setempat  $Nu_x / Re_x^{1/2}$  untuk beberapa

nilai  $f_w$ . Dapat diperhatikan bahawa nilai pekali geseran kulit  $\frac{1}{2} C_f Re_x^{1/2}$  dan nombor Nusselt setempat  $Nu_x / Re_x^{1/2}$  meningkat dengan peningkatan nilai  $\lambda$ . Jadual ini juga mengesahkan kewujudan penyelesaian dual bagi kedua-dua aliran membantu dan aliran menentang. Dalam Jadual 1, penyelesaian dalam kurungan ( ) mewakili penyelesaian kedua.

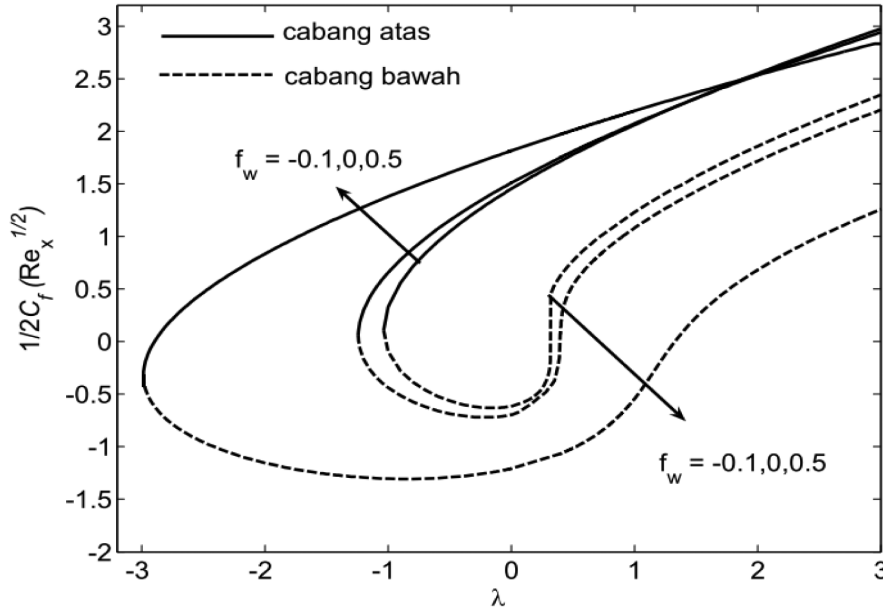
Rajah 2 memaparkan perubahan pekali geseran kulit  $\frac{1}{2} C_f Re_x^{1/2}$  terhadap  $\lambda$  untuk beberapa nilai  $f_w$ , manakala perubahan suhu permukaan  $\theta(0)$  yang berpadanan diberikan dalam Rajah 3. Dapat diperhatikan dalam Rajah 2 dan Jadual 1, bagi suatu nilai  $K$  dan Pr, apabila  $\lambda$  bertambah, kedua-dua nilai pekali geseran kulit dan nombor Nusselt setempat bertambah bagi aliran membantu manakala keadaan sebaliknya berlaku bagi aliran menentang. Ini adalah kerana dalam aliran membantu ( $\lambda > 0$ ), wujud kecerunan tekanan yang dihasilkan oleh daya keapungan yang mempercepatkan aliran, seterusnya meningkatkan pekali geseran kulit dan kadar pemindahan haba pada permukaan. Dalam perbincangan ini, cabang atas dan cabang bawah merujuk kepada Rajah 2, iaitu cabang atas mempunyai nilai  $\frac{1}{2} C_f Re_x^{1/2}$  yang lebih besar berbanding dengan cabang bawah. Dapat diperhatikan bahawa penyelesaian dual wujud bagi semua nilai  $\lambda > 0$  (aliran membantu) manakala penyelesaian dual wujud sehingga satu nilai kritikal  $\lambda$ , katalah  $\lambda_c$  bagi  $\lambda < 0$  (aliran menentang) seperti dipaparkan dalam Rajah 2. Dalam Rajah 2, dapat juga diperhatikan bahawa peningkatan nilai  $f_w$  akan meningkatkan julat nilai  $\lambda$  yang penyelesaian wujud, menunjukkan bahawa parameter

JADUAL 1. Nilai-nilai  $\frac{1}{2} C_f Re_x^{1/2}$  dan  $Nu_x / Re_x^{1/2}$  bagi beberapa nilai  $\lambda$  apabila Pr = 1, K = 1 dan  $f_w = -0.1, 0, 0.5$

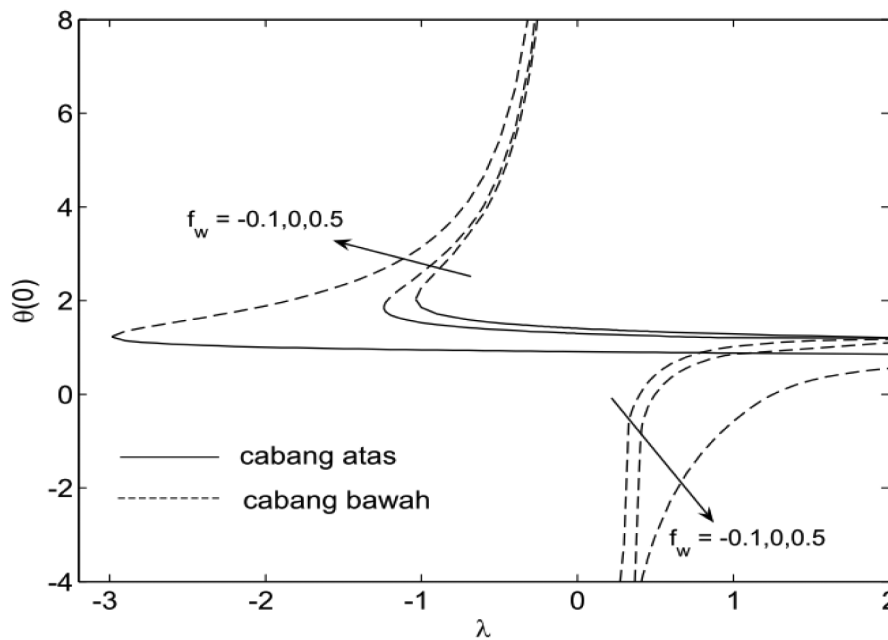
$\lambda$	$f_w$	$\frac{1}{2} C_f Re_x^{1/2}$	$Nu_x / Re_x^{1/2}$
-0.1	-0.1	1.04711	0.65824
		(-0.56360)	(0.22108)
	0	1.15257	0.72598
		(-0.68541)	(0.21291)
	0.5	1.60607	1.08100
		(-1.29099)	(0.18489)
1	-0.1	2.06192	0.77864
		(1.23264)	(0.97935)
	0	2.07281	0.83137
		(1.08057)	(1.16499)
	0.5	2.19371	1.13639
		(-0.54338)	(-1.73659)
2	-0.1	2.55119	0.82606
		(1.85807)	(0.85458)
	0	2.53590	0.87579
		(1.71780)	(0.92985)
	0.5	2.53523	1.16572
		(0.68312)	(1.80177)

sedutan/semburan mempunyai peranan dalam meluaskan julat penyelesaian. Pemisahan lapisan sempadan boleh dielakkan dengan meningkatkan kesan sedutan pada permukaan. Apabila  $\lambda = \lambda_c$  (titik pencabangan nod-pelana), wujud satu penyelesaian, dengan  $\lambda_c$  adalah nilai minimum bagi  $\lambda$  yang penyelesaian wujud. Apabila  $\lambda < \lambda_c$ , tiada penyelesaian untuk sistem persamaan (8)-(11). Nilai-nilai  $\lambda$  ini bagi beberapa nilai  $f_w$  diberi dalam Jadual 2. Rajah 3 pula menunjukkan bahawa bagi penyelesaian

cabang bawah, suhu bendalir pada permukaan jasad  $\theta(0)$  masing-masing meningkat dan menyusut menjadi tanpa had apabila  $\lambda \rightarrow 0^-$  dan  $\lambda \rightarrow 0^+$ . Nilai  $\theta(0)$  tidak wujud apabila  $\lambda = 0$ . Ini menggambarkan bahawa, secara fizikal, penyelesaian cabang bawah tidak realistik. Oleh kerana persamaan (8) dan (9) bergandingan, maka penyelesaian cabang bawah yang dipaparkan dalam Rajah 2 juga tidak mempunyai maksud fizikal. Walau bagaimanapun, penyelesaian ini tetap menarik minat ramai penyelidik



RAJAH 2. Perubahan pekali geseran kulit  $\frac{1}{2} C_f Re_x^{1/2}$  terhadap  $\lambda$  untuk beberapa nilai  $f_w$  apabila  $K = 1$  dan  $Pr = 1$



RAJAH 3. Perubahan suhu permukaan  $\theta(0)$  terhadap  $\lambda$  untuk beberapa nilai  $f_w$  apabila  $K = 1$  dan  $Pr = 1$

(Ishak et al. 2008; Merrill et al. 2006; Ridha 1996) kerana ia merupakan sebahagian daripada penyelesaian persamaan pembezaan, yang mungkin realistik bagi kes lain.

Rajah 4 dan 5 masing-masing memaparkan profil halaju bagi aliran menentang,  $\lambda = -0.5$  dan aliran membantu,  $\lambda = 2$ . Dalam rajah ini, garis penuh merujuk kepada penyelesaian cabang atas (penyelesaian pertama) dan garis putus-putus merujuk kepada penyelesaian cabang bawah (penyelesaian kedua) masalah nilai sempadan (8) - (11). Wujud penyelesaian dual bagi  $\lambda = -0.5$  dan  $\lambda = 2$ , yang kedua-duanya memenuhi syarat sempadan (11). Bagi aliran menentang (Rajah 4), profil halaju bagi penyelesaian cabang atas mempunyai kecerunan positif pada permukaan, manakala kecerunan negatif bagi penyelesaian cabang bawah. Bagi aliran membantu pula (Rajah 5), profil halaju pada kedua-dua cabang atas dan bawah mempunyai kecerunan halaju positif pada permukaan. Pemerhatian ini konsisten dengan keputusan yang ditunjukkan dalam Rajah 2. Dapat diperhatikan juga bahawa penyelesaian cabang bawah dalam kedua-dua aliran membantu dan aliran menentang menunjukkan aliran ke belakang (mempunyai nilai  $f'(\eta) < 0$  dalam julat terhingga  $\eta$ ). Ini mencadangkan yang penyelesaian kedua ini tidak stabil dan secara fizikalnya tidak realistik, konsisten dengan perbincangan sebelum ini.

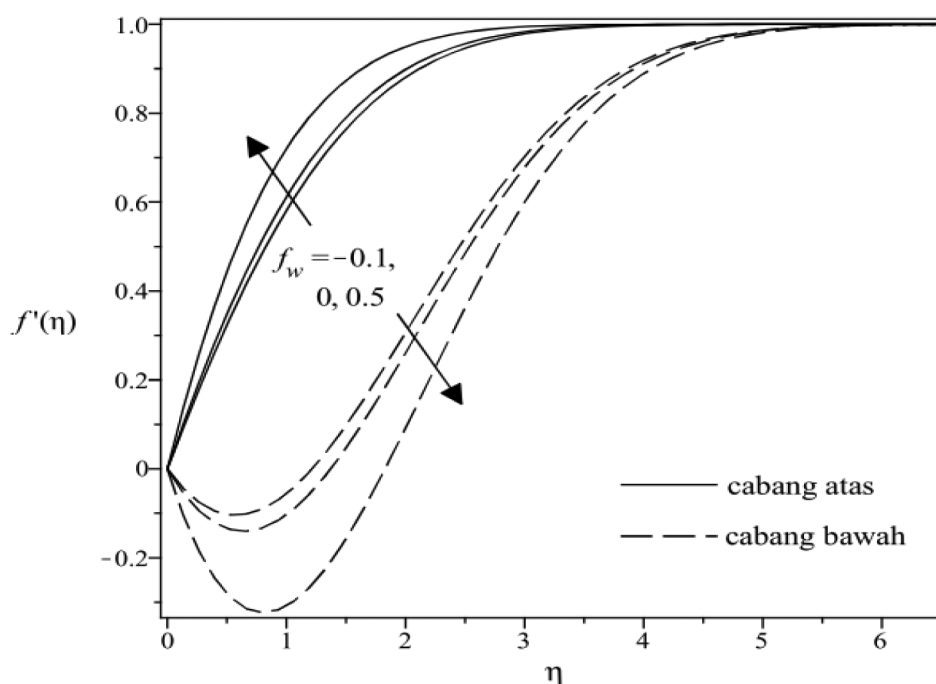
Profil suhu bagi  $\lambda = -0.5$  dan  $\lambda = 2$  ditunjukkan dalam Rajah 6 dan 7. Dalam Rajah 6, dapat diperhatikan bahawa profil suhu untuk penyelesaian cabang bawah adalah lebih tinggi daripada penyelesaian cabang atas. Telatah yang bertentangan ditunjukkan dalam Rajah

7 untuk kes  $\lambda = 2$  (aliran membantu). Perbezaan suhu bendalir pada permukaan  $\theta(0)$  di antara penyelesaian cabang atas dan penyelesaian cabang bawah adalah lebih ketara bagi aliran menentang berbanding dengan aliran membantu. Pemerhatian ini adalah konsisten dengan keputusan yang dipaparkan dalam Rajah 3. Suhu bendalir dalam lapisan sempadan menunjukkan nilai positif,  $\theta(\eta) > 0$ , bagi penyelesaian cabang atas dan cabang bawah apabila  $\lambda = -0.5$  (aliran menentang) seperti yang dipaparkan dalam Rajah 6. Rajah 7 menunjukkan profil suhu negatif bagi penyelesaian cabang bawah untuk julat terhingga  $\eta$ . Seperti yang dibincangkan oleh Ridha (1996), penyelesaian yang  $\theta(\eta) < 0$  adalah tidak relevan secara fizikal.

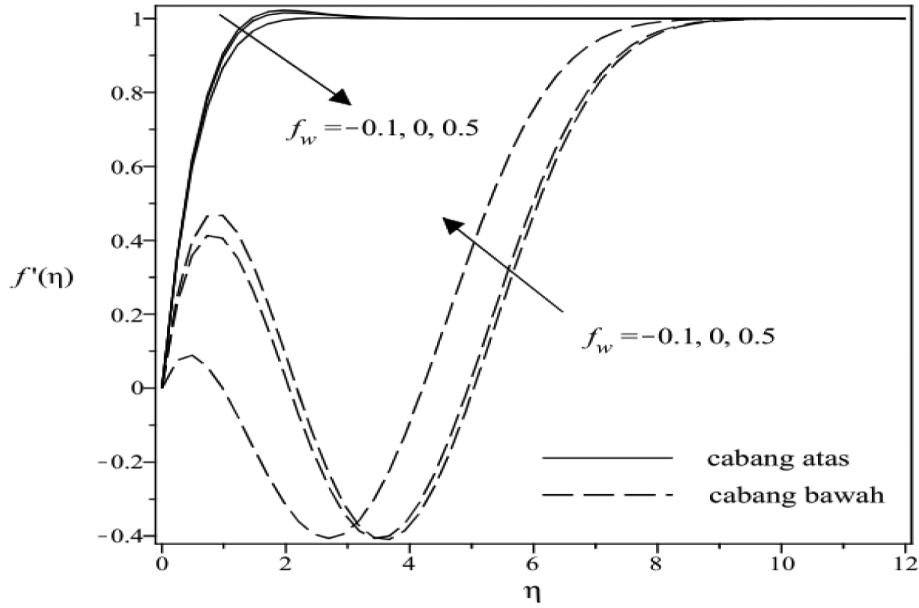
Profil halaju dan suhu yang dipaparkan dalam Rajah 4-7 menunjukkan bahawa syarat syarat sempadan (11) dipenuhi, dan seterusnya menyokong kesahan keputusan berangka yang diperoleh selain daripada menyokong kewujudan penyelesaian dual seperti dipaparkan dalam Rajah 2 dan 3 serta Jadual 1 dan 2.

#### KESIMPULAN

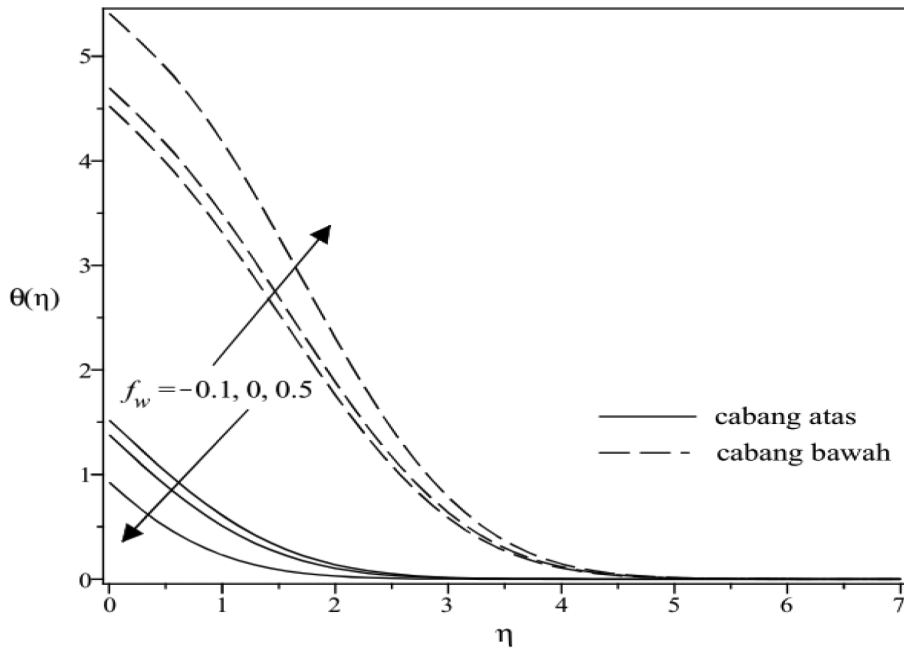
Aliran genangan dalam bendalir mikroktub terhadap permukaan tegak yang telap dengan fluks haba boleh diubah dikaji secara berangka. Persamaan-persamaan menakluk diturunkan kepada sistem persamaan pembezaan biasa menggunakan penjelmaan keserupaan sebelum diselesaikan secara berangka menggunakan kaedah tembakan. Kesan parameter sedutan/semburan  $f_w$  dan parameter keapungan  $\lambda$  terhadap telatah aliran dan



RAJAH 4. Profil halaju  $f'(\eta)$  bagi beberapa nilai  $f_w$  apabila  $\lambda = -0.5$  (aliran menentang),  $K = 1$  dan  $Pr = 1$



RAJAH 5. Profil halaju  $f'(\eta)$  bagi beberapa nilai  $f_w$  apabila  $\lambda = 2$  (aliran membantu),  $K = 1$  dan  $Pr = 1$



RAJAH 6. Profil suhu  $\theta(\eta)$  bagi beberapa nilai  $f_w$  apabila  $\lambda = -0.5$  (aliran menentang),  $K = 1$  dan  $Pr = 1$

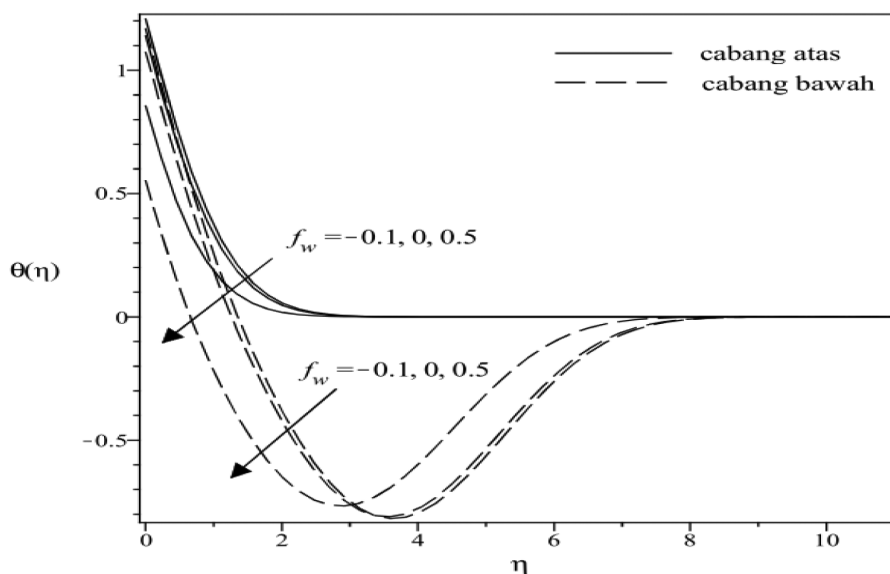
pemindahan haba dibincangkan. Didapati bahawa penyelesaian diperoleh untuk semua nilai positif  $\lambda$  (aliran membantu), manakala untuk nilai negatif  $\lambda$  (aliran menentang), penyelesaian wujud sehingga nilai kritikal  $\lambda_c$ . Nilai  $\lambda_c$  ini berkurang dengan pertambahan nilai  $f_w$ , iaitu julat penyelesaian lebih luas bagi semburan berbanding sedutan. Secara amnya, peningkatan sedutan dan daya keapungan meningkatkan pekali geseran kulit, yang seterusnya meningkatkan kadar pemindahan haba

pada permukaan. Penyelesaian dual didapati wujud bagi kedua-dua aliran membantu dan aliran menentang.

JADUAL 2. Nilai-nilai kritikal  $\lambda_c$  bagi beberapa nilai  $f_w$

$f_w$	$\lambda_c$
-0.1	-1.0338
0	-1.2419
0.5	-2.9862





RAJAH 7. Profil suhu  $\theta(\eta)$  bagi beberapa nilai  $f_w$  apabila  $\lambda = 2$  (aliran membantu),  $K = 1$  dan  $Pr = 1$

#### PENGHARGAAN

Kajian ini dibiayai oleh Geran Universiti Penyelidikan (Kod Projek: UKM-GUP-2011-202) daripada Universiti Kebangsaan Malaysia dan Skim Geran Penyelidikan Asas (Kod Projek: FRGS/1/2011/SG/UNIMAP/03/7) daripada Kementerian Pengajian Tinggi, Malaysia.

#### RUJUKAN

- Ahmadi, G. 1976. Self-similar solution of incompressible micropolar boundary layer flow over a semi-infinite plate. *International Journal of Engineering Science* 14: 639-646.
- Asgharian, A., Domairry Ganji, D., Soleimani, S. & Asgharian, S. 2010. Analytical solution of stagnation flow of a micropolar fluid towards a vertical permeable surface. *Thermal Science* 14: 383-392.
- Devi, C.D.S., Takhar, H.S. & Nath, G. 1991. Unsteady mixed convection flow in stagnation region adjacent to a vertical surface. *Heat and Mass Transfer* 26: 71-79.
- Eringen, A.C. 1966. Theory of micropolar fluids. *Journal of Mathematics and Mechanics* 16: 1-18.
- Gorla, R.S.R. 1988. Combined forced and free convection in micropolar boundary layer flow on a vertical flat plate. *International Journal of Engineering Science* 26: 385-391.
- Hassanien, I. & Gorla, R.S.R. 1990. Combined forced and free convection in stagnation flows of micropolar fluids over vertical non-isothermal surfaces. *International Journal of Engineering Science* 28: 783-792.
- He, X. & Fan, J. 2012. A regularity criterion for 3D micropolar fluid flows. *Applied Mathematics Letters* 25: 47-51.
- Ishak, A. 2010. Thermal boundary layer flow over a stretching sheet in a micropolar fluid with radiation effect. *Meccanica* 45: 367-373.
- Ishak, A., Nazar, R., Arifin, N.M. & Pop, I. 2008. Dual solutions in mixed convection flow near the stagnation point on a vertical porous plate. *International Journal of Thermal Sciences* 47: 417-422.
- Kline, K.A. 1977. A spin-vorticity relation for unidirectional plane flows of micropolar fluids. *International Journal of Engineering Science* 15: 131-134.
- Lok, Y.Y., Amin, N. & Pop, I. 2006. Unsteady mixed convection flow of a micropolar fluid near the stagnation point on a vertical surface. *International Journal of Thermal Sciences* 11: 49-57.
- Lok, Y.Y. & Pop, I. 2011. Wang's shrinking cylinder problem with suction near a stagnation point. *Physics of Fluids* 23: 083102.
- Merrill, K., Beauchesne, M., Previte, J., Paultet, J. & Weidman P. 2006. Final steady flow near a stagnation point on a vertical surface in a porous medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49: 4681-4686.
- Nazar, R., Amin, N., Filip, D. & Pop, I. 2004. Stagnation point flow of a micropolar fluid towards a stretching sheet. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 39: 1227-1235.
- Ramachandran, N., Chen, T.S., & Armaly, B.F. 1988. Mixed convection in stagnation flows adjacent to vertical surfaces. *ASME Journal of Heat Transfer* 110: 373-377.
- Ridha, A. 1996. Aiding flows non-unique similarity solutions of mixed-convection boundary-layer equations. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 47: 341-352.
- Schlichting, H. & Gersten, K. 2003. *Boundary Layer Theory*. Berlin: Springer.
- Sherief, H.H., Faltas M.S. & Ashmawy, E.A. 2011. Slow motion of a sphere moving normal to two infinite parallel plane walls in a micropolar fluid. *Mathematical and Computer Modelling* 53: 376-386.
- Wang, Y.Z., Yuan, H. 2012. A logarithmically improved blow-up criterion for smooth solutions to the 3D micropolar fluid equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 13: 1904-1912.
- Yacob, N.A. & Ishak, A. 2010. Aliran titik genangan terhadap permukaan meregang dalam bendalir mikropolar dengan fluks haba permukaan boleh ubah. *Sains Malaysiana* 39(2): 285-290.

Yacob, N.A. & Ishak, A. 2012. Micropolar fluid flow over a shrinking sheet. *Meccanica* 47: 293-299.

Wan Mohd Khairy Adly bin Wan Zaimi  
Institut Matematik Kejuruteraan  
Kampus Pauh Putra  
Universiti Malaysia Perlis  
02000 Arau  
Perlis, Malaysia

Anuar Ishak\*  
Pusat Pengajian Sains Matematik  
Fakulti Sains dan Teknologi  
Universiti Kebangsaan Malaysia  
43600 UKM Bangi, Selangor  
Malaysia

\*Pengarang untuk surat-menyurat; email: anuar\_mi@ukm.my

Diserahkan: 27 Mac 2012  
Diterima: 21 Mei 2012